

Equazioni esponenziali nel campo reale

$$1) e^{|x|-1} = 3 \rightarrow |x|-1 = \log 3 \rightarrow x = \pm(1 + \log 3) \quad S = \{-1 - \log 3; 1 + \log 3\}$$

$$2) 2^{|x^2-2x|} = 1 \rightarrow |x^2-2x| = 0 \rightarrow x^2-2x = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2 \quad S = \{0; 2\}$$

$$3) 3^{|x^2+x|} = \frac{1}{3} \quad S = \emptyset$$

Risoluzione

Si osservi che per $\forall x \in \mathbb{R}$ risulta $|x^2+x| \geq 0$ e dunque $3^{|x^2+x|} \geq 1$; ne segue che l'equazione non ha soluzioni.

$$4) 2^{|x^2-2x|} = 8 \rightarrow 2^{|x^2-2x|} = 2^3 \rightarrow |x^2-2x| = 3 \quad S = \{-1; 3\}$$

Risoluzione

L'equazione ottenuta è equivalente all'unione logica delle due equazioni seguenti

$$a) x^2 - 2x = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$b) x^2 - 2x = -3 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$$

La prima equazione ammette come radici $x_1 = -1, x_2 = 3$. La seconda, avendo discriminante negativo, non ammette soluzioni reali. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni è quello riportato sopra.

$$5) e^{1-3x} - e^{-2} = 0 \rightarrow e^{1-3x} = e^{-2} \rightarrow 1-3x = -2 \rightarrow x = 1 \quad S = \{1\}$$

$$6) e^{\frac{1-3}{x}} - e^{x^2-3x} = 0 \quad S = \{-1; 1; 3\}$$

Risoluzione

$$e^{\frac{1-3}{x}} - e^{x^2-3x} = 0 \rightarrow e^{\frac{1-3}{x}} = e^{x^2-3x} \quad 1 - \frac{3}{x} = x^2 - 3x, \quad \text{con } x \neq 0 \text{ l'equazione è alla seguente}$$

$x-3 = x(x^2-3x)$, che scritta nella forma $(x-3)(1-x^2) = 0$, si riconosce ammettere come radici $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$.

$$7) e^{x+1} - 10^4 e^{-x-1} - 45 = 0 \quad S = \{-1 + 3 \log 5\}$$

Risoluzione

Ponendo $e^{x+1} = t$ si passa all'equazione nell'incognita $t - \frac{10^4}{t} - 45 = 0 \rightarrow t^2 - 45t - 10^4 = 0$, con

$t \neq 0$. L'equazione ottenuta ammette come radici $t = \frac{45 \pm 205}{2} \rightarrow t_1 = -80, t_2 = 125$.

Ritornando all'incognita x ,

$$t_1 = -80 \rightarrow e^{x+1} = -80, \text{ quest'equazione non ha soluzioni;}$$

$$t_2 = 125 \rightarrow e^{x+1} = 125 \rightarrow x+1 = \log 125 \rightarrow x = -1 + 3 \log 5.$$

Concludiamo che l'equazione in esame ammette solo la soluzione $x = -1 + 3 \log 5$.

$$8) \frac{2^x}{2^{2x-1}} - 8 \cdot \sqrt{2^{x^2-3}} = 0 \quad S = \{-1\}$$

Risoluzione

$$2^{x-(2x-1)} = 2^3 \cdot 2^{\frac{x^2-3}{2}} \rightarrow 2^{-x+1} = 2^{3+\frac{x^2-3}{2}} \rightarrow -x+1 = 3+\frac{x^2-3}{2} \rightarrow x^2+2x+1=0 \rightarrow (x+1)^2=0$$

L'equazione ammette la soluzione doppia $x_1 = x_2 = -1$.

9) $\left| \frac{2^{2x}-1}{2^x+1} \right| = 1$

$$S = \{1\}$$

Risoluzione

$$\left| \frac{2^{2x}-1}{2^x+1} \right| = 1 \rightarrow \left| \frac{(2^x)^2-1}{2^x+1} \right| = 1 \rightarrow \left| \frac{(2^x-1)(\cancel{2^x+1})}{(\cancel{2^x+1})} \right| = 1 \rightarrow |(2^x-1)| = 1 \text{ da cui}$$

$$(2^x-1=1) \vee (2^x-1=-1) \Leftrightarrow (2^x=2) \vee (2^x=0) \Leftrightarrow x=1.$$

10) $e^{2-7x} = 0,1$

$$S = \left\{ \frac{2+\log 10}{7} \right\}$$

Risoluzione

$$e^{2-7x} = 0,1 \rightarrow e^{2-7x} = \frac{1}{10} \rightarrow 2-7x = \log\left(\frac{1}{10}\right) \rightarrow 2-7x = -\log 10 \rightarrow x = \frac{2+\log 10}{7}$$